

斜逆洛朗级数环的弱 McCoy 性*

王尧¹, 史叶萍¹, 任艳丽²

1. 南京信息工程大学数学与统计学院, 江苏南京 210044
2. 南京晓庄学院信息工程学院, 江苏南京 211171

摘要: 设 σ 是环 R 上的一个自同构, δ 是 R 上的一个 σ -导子, 本文引进 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环的概念, 采用分项讨论方法, 给出该环的刻画, 探讨它们的结构性质, 丰富一般斜逆洛朗级数环的研究。

关键词: 斜逆洛朗级数环; 右弱 McCoy 环; 环扩张

中图分类号: O153.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137 (2022) 05-0150-09

On the weak McCoy property of skew inverse Laurent series rings

WANG Yao¹, SHI Yeping¹, REN Yanli²

1. School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China
2. School of Information Engineering, Nanjing Xiaozhuang University, Nanjing 211171, China

Abstract: Let R be a ring with an automorphism σ and a σ -derivation δ . We introduce the concept of (σ, δ) -SILS right weak McCoy rings, give their characterizations and investigate their structural properties by means of the itemized discussion method, enriching the research of general skew inverse Laurent series rings.

Key words: skew inverse Laurent series ring; right weak McCoy ring; extension of rings

本文假定所研究的环 R 都是有单位元 1 的结合环, σ 是环 R 上的一个自同构, δ 是环 R 的一个 σ -导子, 即 δ 是加法群 $(R, +)$ 上的一个映射, 满足 $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$, $\delta(ab) = \delta(a)b + \sigma(a)\delta(b)$, 对任意的 $a, b \in R$. 我们用 $R((x^{-1}; \sigma, \delta))$ 表示 R 上的斜逆洛朗级数环, 其中元素是形如 $f(x) = \sum_{i=-\infty}^m a_i x^i$ 的幂级数, $a_i \in R$, $m \in \mathbf{Z}$ (未必是正整数)。环中加法运算是普通幂级数加法, 乘法满足

$$xr = \sigma(r)x + \delta(r), \quad x^{-1}r = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^{-1}(-\delta\sigma^{-1})^{i-1}(r)x^{-i}, \quad r \in R.$$

斜逆洛朗级数环的研究涉及许多领域, 它不仅为非交换代数提供例子, 还用来研究几何公理的独立性。特别是关于它们的环论性质, 很多学者进行了深入探讨^[1-6]。Alhevaz 等^[3]研究了一般情况下的斜逆洛朗级数环的半素性、拟 Baer 性; Habibi 等^[4-6]讨论了这类环的 Armendariz 性、Baer 性、Zip 性和各类根的关系。特别地, 作为幂级数 McCoy 环^[7]的推广, 文献[6]将 McCoy 性质引入到斜逆洛朗级数环中, 定义了 (σ, δ) -SILS McCoy 环, 即对任意的 $f(x) = \sum_{i=-\infty}^m a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=-\infty}^n b_j x^j \in R((x^{-1}; \sigma, \delta)) \setminus \{0\}$, 其中 $a_i, b_j \in R$,

* 收稿日期: 2020-05-15 录用日期: 2021-10-28 网络首发日期: 2022-03-24

基金项目: 国家自然科学基金(11571165); 江苏省自然科学基金(BK20181406)

作者简介: 王尧 (1962年生), 男; 研究方向: 环论; E-mail: wangyao@nuist.edu.cn

通信作者: 任艳丽(1965年生), 女; 研究方向: 环论; E-mail: renyanlisx@163.com

如果满足 $f(x)g(x) = 0$, 则存在非零元 $c \in R$ 使得 $a_i x^i c = 0$, 对任意 $i \leq m$. 文献[6]中证明了 σ -rigid 环是 (σ, δ) -SILS McCoy 环, 探讨了这类环在各种环扩张下的封闭性. 作为 McCoy 环概念的推广, 本文将把环的弱 McCoy 性引入到斜逆洛朗级数环中, 考虑其与 (σ, δ) -SILS McCoy 环和幂级数右弱 McCoy 环^[8]之间的关系, 探讨它们的结构性质, 进一步丰富斜逆洛朗级数环的研究.

1 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环的刻画

以下, 我们以 $\text{nil}(A)$ 表示一个环 A 的所有幂零元素构成的集合.

定义 1 设 R 是一个环, σ 是 R 上的一个自同构, δ 是环 R 的一个 σ -导子, 称环 R 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环, 如果对任意 $f(x) = \sum_{i=-\infty}^m a_i x^i, g(x) = \sum_{j=-\infty}^n b_j x^j \in R((x^{-1}; \sigma, \delta)) \setminus \{0\}$ 且满足 $f(x)g(x) = 0$, 则存在非零元 $c \in R$ 使得 $a_i x^i c \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$, 对任意 $i \leq m$.

定义 2 设 R 是一个环, σ 是 R 上的一个自同构, δ 是环 R 的一个 σ -导子, 那么称环 R 是一个线性 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环, 如果对任意 $f(x) = a_{-1}x^{-1} + a_0, g(x) = b_{-1}x^{-1} + b_0 \in R((x^{-1}; \sigma, \delta)) \setminus \{0\}$ 且满足 $f(x)g(x) = 0$, 则存在非零元 $c \in R$ 使得 $a_i x^i c \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$, 其中 $i, j \in \{0, -1\}$.

易见, (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环一定是线性 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环; (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环一定是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环. 但反过来未必成立(见例 1). 当 $R((x^{-1}; \sigma, \delta))$ 是约化环(没有非零的幂零元)时, 两者相同.

例 1 设 R 是一个约化环, 令 $S = T_2(R)$ 表示 R 的 2 阶上三角矩阵环, 则 S 是 $(1, 0)$ -SILS 右弱 McCoy 环, 但不是 $(1, 0)$ -SILS 右弱 McCoy 环.

证明 根据下面的定理 2 知 S 是 $(1, 0)$ -SILS 右弱 McCoy 环. 令

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^{-1}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} r & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -r & -r \end{pmatrix} x^{-1} \in S((x^{-1}; 1, 0)),$$

则有 $f(x)g(x) = 0$. 若 S 是 $(1, 0)$ -SILS 右弱 McCoy 环, 则存在 $0 \neq M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in S$ 满足 $\begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M = 0$, 即有 $ra = rb = rc = 0$. 因 R 是约化的, 故 $a = b = c = 0$, 从而 $M = 0$, 这与 $M \neq 0$ 矛盾, 所以 S 不是 $(1, 0)$ -SILS 右弱 McCoy 环.

下面考虑斜逆洛朗级数环的子环斜逆洛朗幂级数环 $R[[x^{-1}; \sigma, \delta]]$, 其中元素形如 $f(x) = \sum_{i=-\infty}^0 a_i x^i$, 运算与 $R((x^{-1}; \sigma, \delta))$ 中相同. 当取 $\sigma = 1, \delta = 0$ 时, 此时斜逆洛朗幂级数环表示为 $R[[x^{-1}]]$. 且与 $R[[x]]$ 之间存在环同构 $\alpha: R[[x]] \rightarrow R[[x^{-1}]]$, $\alpha\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_j x^j\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j x^{-j}$. 可类似给出右弱 McCoy 性的定义: 设 R 是一个环, 对任意 $f(x) = \sum_{i=-\infty}^0 a_i x^i, g(x) = \sum_{j=-\infty}^0 b_j x^j \in R[[x^{-1}]] \setminus \{0\}$, 其中 $a_i, b_j \in R$. 若满足 $f(x)g(x) = 0$, 则存在非零元 $c \in R$ 使得 $a_i c \in \text{nil}(R)$, 对任意 $i \leq 0$. 我们称之为负幂级数右弱 McCoy 环. 负幂级数左弱 McCoy 性可类似定义. 如果环 R 既是负幂级数右弱 McCoy 环又是负幂级数左弱 McCoy 环, 那么称 R 是负幂级数弱 McCoy 环. 显然文献[8]中关于幂级数弱 McCoy 环的结论均可平移过来.

引理 1 $(1, 0)$ -SILS 右弱 McCoy 环是负幂级数右弱 McCoy 环.

证明 设 R 是一个 $(1, 0)$ -SILS 右弱 McCoy 环. 取 $f(x) = \sum_{i=-\infty}^0 a_i x^i, g(x) = \sum_{j=-\infty}^0 b_j x^j \in R[[x^{-1}]] \setminus \{0\}$, 其中 $a_i, b_j \in R$, 且满足 $f(x)g(x) = 0$. 由于 $R[[x^{-1}]] \leq R((x^{-1}))$, 根据 R 是一个 $(1, 0)$ -SILS 右弱 McCoy 环, 知存在 $0 \neq c \in R$ 使得 $a_i x^i c \in \text{nil}(R((x^{-1})))$, 故有 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $(a_i x^i c)^n = 0$, 即 $(a_i c x^i)^n = (a_i c)^n x^{in} = 0$, 从而 $(a_i c)^n = 0$, 所以 $a_i c \in \text{nil}(R)$. 因此, R 是一个负幂级数右弱 McCoy 环.

推论 1 设 R 是一个约化环, $M_n(R)$ 表示 R 上的 n 阶矩阵环, 其中 $n \geq 2$. 则 $M_n(R)$ 不是 $(1, 0)$ -SILS 右弱

McCoy 环。

证明 文献[8]的命题 1.1 证明了 $M_n(R)$ 不是幂级数右弱 McCoy 环, 可以类似证明 $M_n(R)$ 不是负幂级数右弱 McCoy 环, 再由引理 1, $M_n(R)$ 更不是 $(1, 0)$ -SILS 右弱 McCoy 环。

例 2 设 R 是一个环, $T_n(R)$ 表示 R 的 n 阶上三角矩阵环, 则 $T_n(R)$ 是负幂级数右弱 McCoy 环, 但 $T_n(R)$ 不是负幂级数右 McCoy 环。

证明 根据文献[8]的例 1.1, 可以同理证得。

弱 Armendariz 环和弱 McCoy 环分别作为 Armendariz 环和 McCoy 环的推广, 弱 Armendariz 环蕴含弱 McCoy 环。李敏等[8]证明了幂级数弱 Armendariz 环是幂级数弱 McCoy 环, 我们自然地考虑斜逆洛朗级数环的情况。文献[9]中提出了 (σ, δ) -SILS Armendariz 环的定义: 如果对任意 $f(x) = \sum_{i=-\infty}^m a_i x^i$, $g(x) =$

$\sum_{j=-\infty}^n b_j x^j \in R((x^{-1}; \sigma, \delta))$, 由 $f(x)g(x) = 0$ 可以推出 $a_i x^i b_j x^j = 0$, $i \leq m, j \leq n$, 则称 R 为 (σ, δ) -SILS Armendariz 环。我们在文献[10]中给出了 (σ, δ) -SILS 弱 Armendariz 环的概念: 对任意 $f(x) = \sum_{i=-\infty}^m a_i x^i$, $g(x) =$

$\sum_{j=-\infty}^n b_j x^j \in R((x^{-1}; \sigma, \delta))$, 其中 $a_i, b_j \in R$, 如果满足 $f(x)g(x) = 0$, 则有 $a_i x^i b_j x^j \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$, 对任意 $i \leq m, j \leq n$ 。显然, (σ, δ) -SILS Armendariz 环一定是 (σ, δ) -SILS 弱 Armendariz 环。

命题 1 (σ, δ) -SILS 弱 Armendariz 环是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

证明 设 $f(x) = \sum_{i=-\infty}^m a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=-\infty}^n b_j x^j \in R((x^{-1}; \sigma, \delta)) \setminus \{0\}$, 其中 $a_i, b_j \in R$, 且满足 $f(x)g(x) = 0$ 。

要证 R 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环, 需找到非零元 $c \in R$ 使得对于任意 $i \leq m$, 有 $a_i x^i c \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$ 。因为环 R 是 (σ, δ) -SILS 弱 Armendariz 环, 且 $f(x)g(x) = 0$, 则对于任意 $i \leq m, j \leq n$, 有 $a_i x^i b_j x^j \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$ 。

若 $g(x)$ 的常数项 $b_0 \neq 0$, 那么取 $j = 0$, 则对于任意 $i \leq m$, $a_i x^i b_0 \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$ 。此时, 取 $0 \neq c = b_0 \in R$; 若 $g(x)$ 的常数项 $b_0 = 0$, 由于 $g(x)$ 是非零的, 不妨设 $g(x)$ 的首项系数 $b_n \neq 0$, 则 $g(x)$ 的最高次项 $b_n x^n \neq 0$ 。我们构造多项式 $h(x) = g(x)x^{-n} = \left(\sum_{j=-\infty}^n b_j x^j\right)x^{-n} = b_n + \sum_{j=-\infty}^{n-1} b_j x^{j-n} \in R((x^{-1}; \sigma, \delta)) \setminus \{0\}$,

则有 $f(x)h(x) = f(x)g(x)x^{-n} = 0$, 且 $h(x)$ 的常数项 $b_n \neq 0$ 。同理, 对任意 $i \leq m$, 有 $a_i x^i b_n \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$, 取 $0 \neq c = b_n \in R$ 即可。所以 R 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

推论 2 设 R 是一个环, σ 是 R 上的自同构, δ 是环 R 的一个 σ -导子, 如果环 R 是 σ -rigid 环, 则 R 是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

证明 由文献[9]的 Th 2.6 知 σ -rigid 环是 (σ, δ) -SILS Armendariz 环, 因而 R 是一个 (σ, δ) -SILS 弱 Armendariz 环。再由命题 1 知 R 是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

反过来, 命题 1 的逆命题不一定成立。下面给出一个环是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环但不是 (σ, δ) -SILS 弱 Armendariz 环的反例。也仅需考虑 $\sigma = 1, \delta = 0$ 的特殊情形即可。

例 3 设 R 是一个环, $r \in R$ 且是一个非幂零元, 即对于任意 $n \in \mathbf{N}$, $r^n \neq 0$ 。令 $S = T_2(R)$, 则 $T_n(S)$ 是一个负幂级数右弱 McCoy 环。构造多项式

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^{-1}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} r & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -r & -r \end{pmatrix} x^{-1} \in S[[x^{-1}]].$$

有 $f(x)g(x) = 0$ 。由于 $r \notin \text{nil}(R)$, 则

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & r^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \text{nil}(S).$$

所以, S 不是负幂级数弱 Armendariz 环。根据文献[8]的例 1.2, 知 $T_n(S)$ 不是负幂级数弱 Armendariz 环, 因此也不是一个 $(1, 0)$ -SILS 弱 Armendariz 环。

若一个环 R 是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环, 下面考虑它关于环同构是否封闭。

命题 2 设 R 是一个环, σ 是 R 上的一个自同构, δ 是环 R 的一个 σ -导子。设 S 为一个环且存在环同构 $\gamma: R \rightarrow S$, 则 R 是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环当且仅当 S 是 $(\gamma\sigma\gamma^{-1}, \gamma\delta\gamma^{-1})$ -SILS 右弱 McCoy 环。

证明 令 $\sigma' = \gamma\sigma\gamma^{-1}$, $\delta' = \gamma\delta\gamma^{-1}$. 易得 σ' 是环 S 上的自同构, 下证 δ' 是 S 的一个 σ' -导子。对任意 $a, b \in S$, 由

$$\begin{aligned} \delta'(ab) &= \gamma\delta\gamma^{-1}(ab) = \gamma\delta(\gamma^{-1}(a)\gamma^{-1}(b)) = \gamma[\sigma\gamma^{-1}(a)\delta\gamma^{-1}(b) + \delta\gamma^{-1}(a)\gamma^{-1}(b)] \\ &= \gamma\sigma\gamma^{-1}(a)\gamma\delta\gamma^{-1}(b) + \gamma\delta\gamma^{-1}(a)\gamma\gamma^{-1}(b) = \sigma'(a)\delta'(b) + \delta'(a)b, \end{aligned}$$

知 δ' 是 S 的一个 σ' -导子。

下证当 R 是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环时, S 是 $(\gamma\sigma\gamma^{-1}, \gamma\delta\gamma^{-1})$ -SILS 右弱 McCoy 环。

对任意 $a, b \in R$, 令 $a' = \gamma(a)$, $b' = \gamma(b)$, 则对任意 $k \in \mathbf{Z}$, $t \in \mathbf{N}$, $\gamma(a\sigma^k\delta'(b)) = a'\gamma(\sigma^k\delta'(b)) = a'\gamma(\sigma^k\gamma^{-1}\gamma\delta'\gamma^{-1}\gamma(b)) = a'(\gamma\sigma\gamma^{-1})^k(\gamma\delta\gamma^{-1})^t(b') = a'\sigma'^k\delta'^t(b')$. γ 作为 $R \rightarrow S$ 的环同构, 可以扩张成同构 $\bar{\gamma}: R((x^{-1}; \sigma, \delta)) \rightarrow S((x^{-1}; \sigma', \delta'))$, $\bar{\gamma}\left(\sum_{i=-\infty}^m a_i x^i\right) = \sum_{i=-\infty}^m a_i' x^i$. 于是有 $f(x)g(x) = 0$ 当且仅当 $f'(x)g'(x) = 0$,

其中 $f'(x) = \sum_{i=-\infty}^m a_i' x^i$, $g'(x) = \sum_{j=-\infty}^m b_j' x^j \in S((x^{-1}; \sigma', \delta'))$, 且由 $a_i x^i b_j x^j = 0$ 可推出 $a_i' x^i b_j' x^j = 0$. 由于 R 是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环, 存在 $0 \neq c \in R$ 使得 $a_i x^i c \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$, 故必定存在 $n \in \mathbf{N}$ 使得 $(a_i x^i c)^n = 0$, 于是有 $\bar{\gamma}(a_i x^i c)^n = 0 = [\bar{\gamma}(a_i x^i c)]^n = [a_i' x^i \gamma(c)]^n$, 对任意 $i \leq m$. 这推出存在 $0 \neq c' = \gamma(c) \in S$ 使得 $a_i' x^i c' \in \text{nil}(S((x^{-1}; \sigma', \delta')))$. 因此, S 是 $(\gamma\sigma\gamma^{-1}, \gamma\delta\gamma^{-1})$ -SILS 右弱 McCoy 环。反过来, 可用类似方法证得。综上, R 是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环当且仅当 S 是 $(\gamma\sigma\gamma^{-1}, \gamma\delta\gamma^{-1})$ -SILS 右弱 McCoy 环。

我们知道一般的右弱 McCoy 环关于理想和子环未必是封闭的, 从而 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环关于理想和子环也不一定是封闭的。因此可以考虑添加一些特殊条件, 使得 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 性可以传递到部分理想上。下面先给出一个引理:

引理 2 设 R 是一个环, σ 是 R 上的一个自同构, δ 是环 R 的一个 σ -导子, $e \in R$ 是一个中心正则幂等元且满足 $\sigma(e) = e$, $\delta(e) = 0$, 则 $f(x) \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$ 当且仅当 $ef(x) \in \text{nil}(eR((x^{-1}; \sigma, \delta)))$.

证明 设 $f(x) = \sum_{i=-\infty}^m a_i x^i \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$, 则存在 $n \in \mathbf{N}$ 使得 $(f(x))^n = 0$. 由于 $\sigma(e) = e$, $\delta(e) = 0$, 则对于任意 $i \leq m$, 有 $x^i e = ex^i$, 进一步有 $f(x)e = ef(x)$, 所以有 $(ef(x))^n = e(f(x))^n = 0$, 即 $ef(x) \in \text{nil}(eR((x^{-1}; \sigma, \delta)))$.

反过来, 若 $ef(x) \in \text{nil}(eR((x^{-1}; \sigma, \delta)))$, 则存在 $m \in \mathbf{N}$ 使得 $(ef(x))^m = 0$, 展开有 $e(f(x))^m = 0$. 因为 e 是中心正则元, 所以 $(f(x))^m = 0$, 故 $f(x) \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$.

命题 3 设 R 是一个环, σ 是 R 上的一个自同构, δ 是环 R 的一个 σ -导子, $e \in R$ 是一个中心正则幂等元且满足 $\sigma(e) = e$, $\delta(e) = 0$, 则 R 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环当且仅当 eR 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

证明 设 $f(x) = \sum_{i=-\infty}^m ea_i x^i, g(x) = \sum_{j=-\infty}^n eb_j x^j \in eR((x^{-1}; \sigma, \delta)) \setminus \{0\}$, 其中 $a_i, b_j \in R$, 且满足 $f(x)g(x) = 0$.

由于 $f(x), g(x) \in eR((x^{-1}; \sigma, \delta)) \setminus \{0\} \subseteq R((x^{-1}; \sigma, \delta)) \setminus \{0\}$, 且 R 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环, 所以存在 $0 \neq c_1 \in R$ 使得 $ea_i x^i c_1 \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$, 对任意 $i \leq m$. 取 $0 \neq c = ec_1 \in eR$, 有 $ea_i x^i c = ea_i x^i ec_1 = ea_i x^i c_1 \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$, 再由引理 2 可得 $e \cdot ea_i x^i c = ea_i x^i c \in \text{nil}(eR((x^{-1}; \sigma, \delta)))$. 这证明了 eR 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

反过来, 设 $f(x) = \sum_{i=-\infty}^m a_i x^i, g(x) = \sum_{j=-\infty}^n b_j x^j \in R((x^{-1}; \sigma, \delta)) \setminus \{0\}$, 其中 $a_i, b_j \in R$, 且满足 $f(x)g(x) = 0$, 则有 $ef(x)eg(x) = ef(x)g(x) = 0$. 因为 eR 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环, 存在 $0 \neq d = ed_1 \in eR$, 其中 $0 \neq d_1 \in R$, 使得 $ea_i x^i d = ea_i x^i ed_1 = ea_i x^i d_1 \in \text{nil}(eR((x^{-1}; \sigma, \delta)))$. 再根据引理 2 可得 $a_i x^i d_1 \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$, 所以 R 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

推论 3 设 R 是一个环, σ 是 R 上的一个自同构, δ 是环 R 的一个 σ -导子。 $e \in R$ 是一个中心正则幂等元

且满足 $\sigma(e) = e, \delta(e) = 0$, 则下列命题等价:

- (i) R 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环;
- (ii) $eR(Re)$ 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环;
- (iii) $(1 - e)R(R(1 - e))$ 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

证明 (i) \Leftrightarrow (ii) 因为 $e \in R$ 是中心的, 所以 $eR = Re$, 再由命题 3 即证。

(i) \Leftrightarrow (iii) 由 $\sigma(1 - e) = \sigma(1) - \sigma(e) = 1 - e, \delta(1 - e) = \delta(1) - \delta(e) = 0$, 且 $(1 - e)R = R(1 - e)$, 那么与命题 3 类似地可以证明等价结论。

文献[11]给出了弱-相容的概念。设 σ 是环 R 的一个自同态, 如果对于任意 $a, b \in R, ab \in \text{nil}(R) \Leftrightarrow a\sigma(b) \in \text{nil}(R)$, 就称 σ 是弱-相容的。如果环 R 存在一个弱-相容的自同态 σ , 则称环 R 是弱 σ -相容的。设 δ 是一个 σ -导子, 如果对于任意 $a, b \in R, ab \in \text{nil}(R) \Rightarrow a\delta(b) \in \text{nil}(R)$, 则称环 R 是弱 δ -相容的。如果一个环 R 既是弱 σ -相容的又是弱 δ -相容的, 则称 R 为弱 (σ, δ) -相容环。我们在文献[10]中将弱 (σ, δ) -相容环的部分性质进行了推广, 得到以下结论。

引理 3^[10] 若 R 为弱 (σ, δ) -相容环, 则有

- (i) $ab \in \text{nil}(R) \Leftrightarrow \sigma^m(a)\sigma^n(b) \in \text{nil}(R)$, 对任意 $m, n \in \mathbf{Z}$.
- (ii) $ab \in \text{nil}(R) \Rightarrow \sigma^m(a)\delta^s(b), \delta^t(a)\sigma^n(b) \in \text{nil}(R)$, 对任意 $m, n \in \mathbf{Z}, s, t \in \mathbf{N}$.

定理 1 设 R 是弱 (σ, δ) -相容环且 $\text{nil}(R)$ 是幂零理想, 那么以下结论成立且是等价的:

- (i) R 是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

(ii) 如果对任意 $f(x) = \sum_{i=-\infty}^m a_i x^i, g(x) = \sum_{j=-\infty}^n b_j x^j \in R((x^{-1}; \sigma, \delta)) \setminus \{0\}$, 其中 $a_i, b_j \in R, m, n \in \mathbf{Z}$, 且满足 $f(x)g(x) = 0$, 则存在非零元 $c \in R$ 使得 $a_i c \in \text{nil}(R)$, 对任意 $i \leq m$.

证明 结论成立是显然的, 下证两个命题是等价的。

(i) \Rightarrow (ii) 设 $f(x), g(x)$ 是满足 (ii) 中要求的幂级数。因为 R 是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环, 则一定存在 $0 \neq c \in R$ 满足 $a_i x^i c \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$ 。根据文献[10]的命题 3 可得 $a_i x^i c \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$, 再由文献[10]的命题 4, 有 $a_i c \in \text{nil}(R)$ 。

(ii) \Rightarrow (i) 已知存在非零元 $c \in R$ 满足 $a_i c \in \text{nil}(R)$, 对任意 $i \leq m$ 。那么根据引理 3, 有 $a_i x^i c \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$, 再由文献[10]的命题 4 得到 $a_i x^i c \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$ 。

一个环 R 称为 NI 环, 如果 $\text{nil}(R) = \text{Nil}^*(R)$, 其中 $\text{Nil}^*(R)$ 表示 R 的上诣零根 (R 的所有诣零理想的和)。 R 是 NI 环当且仅当 $\text{nil}(R)$ 是 R 的理想当且仅当 $R/\text{Nil}^*(R)$ 是约化环。关于 NI 环的更多性质可见文献[12]。

推论 4 设 R 为 NI 环且是弱 (σ, δ) -相容的环, 对左、右零化子有升链条件或 R 是左(右)Goldie 环, 或对理想有升链条件, 或 R 有右 Krull 维数时, 则 R 是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

证明 当环 R 对左、右零化子有升链条件或 R 是左(右)Goldie 环, 或对理想有升链条件, 或 R 有右 Krull 维数时, $\text{nil}(R)$ 是幂零理想, 则由定理 1 可得 R 是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

设 R 是一个环, σ 是 R 上的一个自同构, δ 是环 R 的一个 σ -导子。我们称环 R 的一个理想 I 为 σ -理想 (σ -不变理想), 若 $\sigma(I) \subseteq I$ ($\sigma(I) = I$); 称 I 为 δ -理想, 若 $\delta(I) \subseteq I$ 。若 I 既是 σ -理想 (σ -不变理想) 又是 δ -理想, 就称 I 是一个 (σ, δ) -理想 ((σ, δ) -不变理想)。

文献[5]给出了 q -量子化导子的概念: 设 δ 是环 R 的一个 σ -导子, 如果存在 $q \in R$ 使得 $q\sigma\delta = \delta\sigma$, 就称 δ 是一个 q -量子化 σ -导子^[5]。

引理 4^[5] 设 R 是一个环, σ 是 R 上的一个自同构, δ 是环 R 的一个 q -量子化 σ -导子, 其中 q 是环 R 的一个中心可逆元且满足 $\sigma(q) = q, \delta(q) = 0$ 。如果 I 是 R 的一个幂零 (σ, δ) -不变理想, 则 $I((x^{-1}; \sigma, \delta))$ 是 $R((x^{-1}; \sigma, \delta))$ 的一个幂零理想。

命题 4 设 R 是一个环, σ 是 R 上的一个自同构, δ 是环 R 的一个 q -量子化 σ -导子, 其中 q 是环 R 的一个中心可逆元且满足 $\sigma(q) = q, \delta(q) = 0$ 。只要 I 是 R 的一个幂零 (σ, δ) -不变理想, 就有 I 是 (σ, δ) -SILS 右

弱 McCoy 环。

证明 任取 $f(x) = \sum_{i=-\infty}^m a_i x^i, g(x) = \sum_{j=-\infty}^n b_j x^j \in I((x^{-1}; \sigma, \delta)) \setminus \{0\}$, 其中 $a_i, b_j \in I$ 且满足 $f(x)g(x) = 0$, 则对于 I 中任意非零元素 c , 根据 I 是 R 的 (σ, δ) -不变理想, 有 $a_i x^i c \in I((x^{-1}; \sigma, \delta))$, 对任意 $i \leq m$. 再利用引理 4, 可知 $I((x^{-1}; \sigma, \delta))$ 是幂零理想, 其中元素均是幂零元。所以 $a_i x^i c \in \text{nil}(I((x^{-1}; \sigma, \delta)))$. 从而 I 是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

2 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 的扩张

命题 5 设 I 是指标集, $\{R_i, i \in I\}$ 是一族环, σ_i 是 R_i 上的一个自同构, δ_i 是环 R_i 的一个 σ_i -导子。如果每一个 R_i 都是 (σ_i, δ_i) -SILS 右弱 McCoy 环, 则 $R = \prod_{i \in I} R_i$ 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环, 其中对于任意 $a = (a_i)_{i \in I} \in R, \sigma(a) = (\sigma_i(a_i))_{i \in I}, \delta(a) = (\delta_i(a_i))_{i \in I}$.

证明 显然 σ 是 R 的一个自同构, 下面证明 δ 是一个 σ -导子。任取 $a = (a_i)_{i \in I}, b = (b_i)_{i \in I} \in R$, 那么, $ab = (a_i b_i)_{i \in I}$, 有 $\delta(ab) = (\delta_i(a_i b_i))_{i \in I} = (\sigma_i(a_i) \delta_i(b_i) + \delta_i(a_i) b_i)_{i \in I}$. 另外,

$$\sigma(a) \delta(b) + \delta(a) b = (\sigma_i(a_i))_{i \in I} (\delta_i(b_i))_{i \in I} + (\delta_i(a_i))_{i \in I} (b_i)_{i \in I} = (\sigma_i(a_i) \delta_i(b_i) + \delta_i(a_i) b_i)_{i \in I} = \delta(ab).$$

下证 $R = \prod_{i \in I} R_i$ 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。任取 $f(x) = \sum_{p=-\infty}^m a_p x^p, g(x) = \sum_{q=-\infty}^n b_q x^q \in R((x^{-1}; \sigma, \delta)) \setminus \{0\}$, 其中 $a_p = (a_{pi})_{i \in I}, b_q = (b_{qi})_{i \in I} \in R$. 若 $f(x)g(x) = 0$, 则有 $\left(\sum_{p=-\infty}^m a_p x^p\right) \left(\sum_{q=-\infty}^n b_q x^q\right) = 0$. 令 $f_i(x) = \sum_{p=-\infty}^m a_{pi} x^p, g_i(x) = \sum_{q=-\infty}^n b_{qi} x^q \in R_i((x^{-1}; \sigma_i, \delta_i))$, 则有 $f_i(x)g_i(x) = 0$, 对任意 $i \in I$.

(i) 若存在 $k \in I$ 使得 $f_k(x) \neq 0$ 且 $g_k(x) \neq 0$. 因为 R_k 是 (σ_k, δ_k) -SILS 右弱 McCoy 环, 所以存在 $0 \neq c_k \in R_k$ 使得 $a_{pk} x^p c_k \in \text{nil}(R_k((x^{-1}; \sigma_k, \delta_k)))$. 于是取 $c = (c_i)_{i \in I} \in R$, 当 $i = k$ 时, $c_i = c_k$, 当 $i \neq k$ 时, $c_i = 0$. 此时, $a_p x^p c \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$.

(ii) 若不存在 $k \in I$ 使得 $f_k(x) \neq 0$ 与 $g_k(x) \neq 0$ 同时成立, 那么有下面两种情形:

(a) 存在 $i \in I$ 满足 $f_i(x) \neq 0$ 但 $g_i(x) = 0$. 设 $J = \{i \in I \mid f_i(x) \neq 0\}$, 则 $J \neq \emptyset$ 且 $J \neq I$, 否则 $g(x) = 0$ 与条件矛盾。此时取 $c = (c_i)_{i \in I} \in R$, 当 $i \in J$ 时, $c_i = 0$, 当 $i \notin J$ 时, $c_i = 1$. 显然 $c \neq 0$, 且 $a_p x^p c = (a_{pi} x^p c_i)_{i \in I} = 0$, 所以 $a_p x^p c \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$.

(b) 存在 $i \in I$ 满足 $f_i(x) = 0$ 但 $g_i(x) \neq 0$, 同理可证。

综上, $R = \prod_{i \in I} R_i$ 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

推论 5 设 $I = \{1, 2, \dots, n\}$ 是有限指标集, $\{R_i, i \in I\}$ 是一族环, σ_i 是 R_i 上的一个自同构, δ_i 是环 R_i 的一个 σ_i -导子。如果 R_i 都是 (σ_i, δ_i) -SILS 右弱 McCoy 环, 那么直和 $R = \bigoplus_{i=1}^n R_i$ 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环, 其中对于任意 $a = (a_i)_{i \in I} \in R, \sigma(a) = (\sigma_i(a_i))_{i \in I}, \delta(a) = (\delta_i(a_i))_{i \in I}$.

证明 与命题 5 类似可证。

推论 6 设 R 是一个环, σ 是环 R 上的一个自同构, δ 是环 R 的一个 σ -导子, $e \in R$ 是一个中心幂等元。如果 eR 和 $(1 - e)R$ 都是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环, 那么 R 是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

证明 因为 e 是 R 的中心幂等元, 由于 $R = eR \oplus (1 - e)R$, 那么根据推论 5, R 是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

文献 [13] 介绍了环 $R[D, C]$ 的相关概念。设 D 是一个环, C 是 D 的一个子环且包含单位元 1, $R[D, C] = \{(d_1, d_2, \dots, d_n, c, c, \dots) \mid d_i \in D, c \in C, n \in \mathbf{Z}_+\}$, 则该集合关于分量的加法和乘法构成环。因此若环 D 上定义了一个自同构 σ 和 σ -导子 δ , 则可延拓成 $\bar{\sigma}, \bar{\delta}: R[D, C] \rightarrow R[D, C]$,

$$\bar{\sigma}\left((d_1, d_2, \dots, d_n, c, c, \dots)\right) = (\sigma(d_1), \sigma(d_2), \dots, \sigma(d_n), \sigma(c), \sigma(c), \dots),$$

$$\bar{\delta}\left((d_1, d_2, \dots, d_n, c, c, \dots)\right) = (\delta(d_1), \delta(d_2), \dots, \delta(d_n), \delta(c), \delta(c), \dots).$$

推论 7 设 D 是一个环, σ 是环 D 上的一个自同构, δ 是环 D 的一个 σ -导子, C 是 D 的一个幂零 (σ, δ) -

不变理想, 则 D 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环可推出 $R[D, C]$ 是一个 $(\bar{\sigma}, \bar{\delta})$ -SILS 右弱 McCoy 环。

证明 根据命题 4 可知 C 是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环, 再利用命题 5 的方法可证。

反过来, 我们可以考虑若由环 R_i 构成的直和或直积 R 是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 的, R_i 是否是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

命题 6 设 R 是一个环, σ 是 R 上的一个自同构, δ 是环 R 的一个 σ -导子。设 I 是指标集, $\{R_i, i \in I\}$ 是一族环, σ_i 是环 R_i 上的一个自同构, δ_i 是环 R_i 的一个 σ_i -导子。若 $R_i = R, \sigma_i = \sigma, \delta_i = \delta$ 。那么, $R' = \prod_{i \in I} R_i$ 是一个 (σ', δ') -SILS 右弱 McCoy 环可以推出 R 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环, 其中对于任意 $a = (a_i)_{i \in I} \in R', \sigma'(a) = (\sigma_i(a_i))_{i \in I} = (\sigma(a_i))_{i \in I}, \delta'(a) = (\delta(a_i))_{i \in I}$ 。

证明 设 $f(x) = \sum_{p=-\infty}^m a_p x^p, g(x) = \sum_{q=-\infty}^n b_q x^q \in R((x^{-1}; \sigma, \delta)) \setminus \{0\}$, 其中 $a_p, b_q \in R$ 且有 $f(x)g(x) = 0$ 。我们构造 $F(x) = \sum_{p=-\infty}^m A_p x^p, G(x) = \sum_{q=-\infty}^n B_q x^q \in R'((x^{-1}; \sigma', \delta')) \setminus \{0\}$, 其中 $A_p = (a_{pi})_{i \in I}, B_q = (b_{qi})_{i \in I} \in R$, 且 $a_{pi} = a_p, b_{qi} = b_q$, 对任意 $i \in I$, 则 $F(x)G(x) = 0$ 。又因为 R' 是 (σ', δ') -SILS 右弱 McCoy 环, 故存在 $0 \neq c' = (c_i)_{i \in I} \in R'$ 使得 $A_p x^p c' \in \text{nil}(R'((x^{-1}; \sigma', \delta')))$ 。选取 $c' = (c_i)_{i \in I}$ 的非零元分量, 记为 c , 则有 $a_p x^p c \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$ 。所以 R 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

下面, 我们考虑何时 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 性质关于常见的矩阵扩张是封闭的。

设 R 是一个环, 我们以 $T_n(R)$ 表示 R 上的 n 阶上三角矩阵环, 以 $S_n(R)$ 表示主对角线上元素相等的上三角矩阵环 (其中 $n \geq 2$), 以 $T(R, n)$ 表示每条对角线上元素相等的上三角矩阵环且 $n \geq 2$, 即

$$S_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \mid a, a_{ij} \in R, i, j \in \mathbf{Z}_+ \right\},$$

$$T(R, n) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \mid a_i \in R, i \in \mathbf{Z}_+ \right\}.$$

上述矩阵有以下包含关系: $T(R, n) \subseteq S_n(R) \subseteq T_n(R)$ 。再用 $T(R, R)$ 表示环 R 通过 R 的平凡扩张, 其中加法定义为: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, 乘法为 $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc)$ 。易见, $T(R, R)$ 与 $S_2(R)$ 同构。

如果环 R 上定义了自同构 σ 和 σ -导子 δ , 那么 σ, δ 可以延拓到 $T_n(R), S_n(R), T(R, n)$ 或 $T(R, R)$ 上: $\bar{\sigma}((a_{ij})) = (\sigma(a_{ij})), \bar{\delta}((a_{ij})) = (\delta(a_{ij}))$ 。

定理 2 设 R 是一个环, σ 是环 R 上的一个自同构, δ 是环 R 的一个 σ -导子, 则 S 是一个 $(\bar{\sigma}, \bar{\delta})$ -SILS 右弱 McCoy 环, 其中 S 为 $T_n(R), S_n(R), T(R, n), T(R, R)$ 中任意一个环。

证明 显然, $\bar{\sigma}$ 是 S 上的自同构, $\bar{\delta}$ 是 S 的一个 $\bar{\sigma}$ -导子。下面仅证当 S 为 $T_n(R)$ 时情形。

容易看出存在环同构 $\alpha: S((x^{-1}; \bar{\sigma}, \bar{\delta})) \rightarrow T_n(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$, $\alpha\left(\sum_{k=-\infty}^r A_k x^k\right) = (f_{ij})$, 其中 $A_k = (a_{ij}^{(k)}) \in S, f_{ij}(x) = \sum_{k=-\infty}^r a_{ij}^{(k)} x^k \in R((x^{-1}; \sigma, \delta))$, 对任意 $k \leq r, 1 \leq i, j \leq n$ 。设 $p(x) = \sum_{k=-\infty}^r A_k x^k, q(x) = \sum_{l=-\infty}^s B_l x^l \in S((x^{-1}; \bar{\sigma}, \bar{\delta})) \setminus \{0\}$ 且满足 $p(x)q(x) = 0$ 。其中 $A_k = (a_{ij}^{(k)}), B_l = (b_{ij}^{(l)}) \in S, k \leq r, l \leq s$ 。则有 $(f_{ij})(g_{ij}) = 0, g_{ij}(x) = \sum_{l=-\infty}^s b_{ij}^{(l)} x^l \in R((x^{-1}; \sigma, \delta))$ 。

根据环同构 α , 我们有 $\alpha(A_k x^k) = (f_{ij})$, 其中 $f_{ij}(x) = a_{ij}^{(k)} x^k \in R((x^{-1}; \sigma, \delta))$, 对任意 $k \leq r, 1 \leq i, j \leq n$ 。取 $0 \neq C = E_{1n} \in S$, 此时 $(f_{ij})C = (d_{ij}) \in T_n(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$, $d_{1n} = a_{1n}^{(k)} x^k$, 当 $(i, j) \neq (1, n)$ 时, $d_{ij} = 0$ 。易得

$(d_{ij})^2 = 0$, 即 $(d_{ij}) \in \text{nil}(T_n(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$). 于是有

$$\alpha^{-1}(d_{ij}) = \alpha^{-1}(f_{ij})C = \alpha^{-1}(f_{ij})\alpha^{-1}(C) = A_k x^k C \in \text{nil}(S((x^{-1}; \bar{\sigma}, \bar{\delta}))).$$

因而 S 是 $(\bar{\sigma}, \bar{\delta})$ -SILS 右弱 McCoy 环。

文献[14]介绍了 n 阶斜上三角矩阵环 $T_n(R, \alpha)$. 设 R 是一个环, α 是 R 的自同态且满足 $\alpha(1) = 1$. $T_n(R, \alpha)$ 中元素为上三角矩阵, 加法为一般矩阵的加法, 乘法满足: $E_{ij}r = \alpha^{j-i}(r)E_{ij}$, $i \leq j$. 即若 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in T_n(R, \alpha)$, $AB = C = (c_{ij})$, 则 $c_{ij} = a_{ii}b_{ij} + a_{i,i+1}\alpha(b_{i+1,j}) + \dots + a_{ij}\alpha^{j-i}(b_{jj})$. $T_n(R, \alpha)$ 有下列子环: $S(R, n, \alpha)$ 表示主对角线元素相同的矩阵构成的环, $T(R, n, \alpha)$ 表示所有主、次对角线上元素相同的矩阵构成的环, 以及

$$A(R, n, \alpha) = \left\{ \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i=1}^{n-j+1} a_j E_{i,i+j-1} + \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^n \sum_{i=1}^{n-j+1} a_{i,i+j-1} E_{i,i+j-1} \right\},$$

$$B(R, n, \alpha) = \{A + rE_{1k} \mid A \in A(R, n, \alpha), r \in R\}, \quad n = 2k \geq 4.$$

显然有 $A(R, n, \alpha), B(R, n, \alpha) \leq S(R, n, \alpha)$. 文献[6]说明了若 α 是 R 的自同态, σ 是环 R 的一个自同构, δ 是 R 的一个 σ -导子, 同时满足 $\alpha\sigma = \sigma\alpha, \alpha\delta = \delta\alpha$, 则 σ, δ 可以延拓成 $\bar{\sigma}, \bar{\delta}: C \rightarrow C$. C 可取 $S(R, n, \alpha), T(R, n, \alpha), A(R, n, \alpha), B(R, n, \alpha)$ 中任意一个, 其中 $\bar{\sigma}$ 和 $\bar{\delta}$ 定义为: $\bar{\sigma}((a_{ij})) = (\sigma(a_{ij}))$, $\bar{\delta}((a_{ij})) = (\delta(a_{ij}))$. 同时, α 也可以延拓成 $\bar{\alpha}: R((x^{-1}; \sigma, \delta)) \rightarrow R((x^{-1}; \sigma, \delta)), \bar{\alpha}\left(\sum_{i=-\infty}^m a_i x^i\right) = \sum_{i=-\infty}^m \alpha(a_i) x^i$.

定理 3 设 R 是一个环, α 是环 R 上的一个自同态, σ 是 R 上的一个自同构, δ 是环 R 的一个 σ -导子, 且 $\alpha\sigma = \sigma\alpha, \alpha\delta = \delta\alpha$, 那么 C 是一个 $(\bar{\sigma}, \bar{\delta})$ -SILS 右弱 McCoy 环, 其中 C 可取 $S(R, n, \alpha), T(R, n, \alpha), A(R, n, \alpha), B(R, n, \alpha)$ 中任意一个环。

证明 不妨取 $C = S(R, n, \alpha)$, 那么存在以下环同构 $\beta: C((x^{-1}; \bar{\sigma}, \bar{\delta})) \rightarrow S(R((x^{-1}; \sigma, \delta)), n, \bar{\alpha})$, $\beta\left(\sum_{k=-\infty}^r A_k x^k\right) = (f_{ij})$, 其中 $f_{ij}(x) = \sum_{k=-\infty}^r a_{ij}^{(k)} x^k \in R((x^{-1}; \sigma, \delta))$, 对任意 $k \leq r, 1 \leq i, j \leq n$. 再利用与定理 2 相同的证明方法即可。

我们自然而然地会考虑定理 2 和定理 3 的逆命题是否还能成立。

命题 7 设 S 为 $T_n(R), S_n(R)$ 或 $T(R, n), T(R, R)$ 中任意一个环, 且主对角线上元素非零。如果 S 是一个 $(\bar{\sigma}, \bar{\delta})$ -SILS 右弱 McCoy 环, 那么 R 也是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

证明 只证 S 为 $T_n(R)$ 时情形即可。设 $f(x) = \sum_{k=-\infty}^r a_k x^k, g(x) = \sum_{l=-\infty}^s b_l x^l \in R((x^{-1}; \sigma, \delta)) \setminus \{0\}$ 且满足 $f(x)g(x) = 0$. 取 $F(x) = \sum_{k=-\infty}^r A_k x^k, G(x) = \sum_{l=-\infty}^s B_l x^l \in S((x^{-1}; \bar{\sigma}, \bar{\delta})) \setminus \{0\}$, 其中 $A_k = a_k E_n, B_l = b_l E_n \in S$, 那么有 $F(x)G(x) = 0$. 因为 S 是一个 $(\bar{\sigma}, \bar{\delta})$ -SILS 右弱 McCoy 环, 则存在 $0 \neq C = (c_{ij}) \in S$, 其中 $c_{ii} \neq 0$, 使得 $A_k x^k C \in \text{nil}(S((x^{-1}; \bar{\sigma}, \bar{\delta})))$, 即 $a_k x^k c_{ii} \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$. 从而我们找到了 $0 \neq c = c_{ii} \in R$ 满足 $a_k x^k c \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$. 所以, R 是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

推论 8 设 C 为 $S(R, n, \alpha), T(R, n, \alpha), A(R, n, \alpha), B(R, n, \alpha)$ 中任意一个环, $\alpha\sigma = \sigma\alpha, \alpha\delta = \delta\alpha$ 且主对角线上元素非零。如果 C 是一个 $(\bar{\sigma}, \bar{\delta})$ -SILS 右弱 McCoy 环, 那么 R 也是一个 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环。

我们还可以类似地给出 (σ, δ) -SILS 左弱 McCoy 环和 (σ, δ) -SILS 弱 McCoy 环的定义。

定义 3 设 R 是一个环, σ 是 R 上的一个自同构, δ 是环 R 的一个 σ -导子。称环 R 是一个 (σ, δ) -SILS 左弱 McCoy 环, 如果对任意 $f(x) = \sum_{i=-\infty}^m a_i x^i, g(x) = \sum_{j=-\infty}^n b_j x^j \in R((x^{-1}; \sigma, \delta)) \setminus \{0\}$, 其中 $a_i, b_j \in R, m, n \in \mathbf{Z}$.

若满足 $f(x)g(x) = 0$, 则存在非零元 $d \in R$ 使得 $db_j x^j \in \text{nil}(R((x^{-1}; \sigma, \delta)))$, 对任意 $j \leq n$.

定义 4 若 R 既是 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环又是 (σ, δ) -SILS 左弱 McCoy 环, 则称 R 为 (σ, δ) -SILS 弱

McCoy 环。

本文中关于 (σ, δ) -SILS 右弱 McCoy 环的结论对 (σ, δ) -SILS 左弱 McCoy 环同样成立, 更进一步地, 对 (σ, δ) -SILS 弱 McCoy 环仍然成立。

参考文献:

- [1] LETZTER E S, WANG L. Noetherian skew inverse power series rings [J]. *Algebras Represent Theory*, 2010, 13(3): 303–314.
- [2] TUGANBAEV D A. Laurent series rings and pseudo-differential operator rings [J]. *J Math Sci*, 2005, 128(3): 2843–2893.
- [3] ALHEVAZ A, KIANI D. On primeness of general skew inverse Laurent series ring [J]. *Commun Algebra*, 2017, 45(3): 919–923.
- [4] HABIBI M, MOUSSAVI A, MOKHTARI S. On skew Armendariz of Laurent series type rings [J]. *Commun Algebra*, 2012, 40(11): 3999–4018.
- [5] PAYKAN K, MOUSSAVI A. Study of skew inverse Laurent series rings [J]. *J Algebra Appl*, 2017, 16(12): 1750221.
- [6] ALHEVAZ A, KIANI D. On zero-divisors in skew inverse Laurent series over noncommutative rings [J]. *Commun Algebra*, 2014, 42(2): 469–487.
- [7] YANG S, SONG X, LIU Z. Power-serieswise McCoy rings [J]. *Algebra Colloq*, 2011, 18(2): 301–310.
- [8] 李敏, 王尧, 任艳丽. 幂级数弱 McCoy 环[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2016, 51(2): 6–11.
- [9] ALHEVAZ A, KIANI D. Radicals of skew inverse Laurent series rings [J]. *Commun Algebra*, 2013, 41(8): 2884–2902.
- [10] 史叶萍, 王尧, 任艳丽. 斜逆 Laurent 级数环的弱 Armendariz 性质[J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2020, 58(4): 808–814.
- [11] OUYANG L, LIU J. On weak (α, δ) -compatible rings [J]. *Int J Algebra*, 2011, 5(26): 1283–1296.
- [12] HWANG S U, JEON Y C, LEE Y. Structure and topological conditions of NI rings [J]. *J Algebra*, 2006, 302(1): 186–199.
- [13] CHENG G, CHEN J. The structure of ring $R[D, C]$ and its characterizations [J]. *J Nanjing Univ Math Biquarterly*, 2007, 24(1): 20–28.
- [14] CHEN J, YANG X, ZHOU Y. On strongly clean matrix and triangular matrix rings [J]. *Commun Algebra*, 2006, 34(10): 3659–3674.

(责任编辑 冯兆永)